Molina, M. y Castro, E. (2005). *Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional.* En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 205-214). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

TRABAJO CON IGUALDADES NUMÉRICAS PARA PROMOVER PENSAMIENTO RELACIONAL

Marta Molina
(martamg@ugr.es)
Universidad de Granada

Encarnación Castro
(encastro@ugr.es)
Universidad de Granada

Resumen

En este documento presentamos algunos de los resultados de un estudio[1] *que aporta evidencias de la capacidad de los alumnos de tercer grado para desarrollar pensamiento relacional y para comprender el significado del signo igual trabajando en un contexto de igualdades numéricas.*

Abstract

In this document we present some of the results of a study which provides evidence of third grade students´ capacity to develop relational thinking and to understand the equal sign meaning both in the context of number sentences.

1. Introducción

Recientemente investigadores como Kaput (1999), Carpenter, Franke, y Levi (2003) y Warren (2004) han argumentado sobre la importancia de fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la educación matemática escolar, con el objetivo de promover un aprendizaje con comprensión y facilitar el posterior estudio formal del álgebra. Según esta propuesta los maestros han de promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2003). Se considera que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son hábitos mentales importantes que los alumnos deben de adquirir ya que tienen el potencial de poder enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética.

En esta línea, tomamos como referencia fundamental un trabajo dirigido por Carpenter (Carpenter et al., 2003) en el que se aborda el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento algebraico desde la enseñanza de la aritmética entre los que se encuentran la comprensión del signo igual, la observación de relaciones numéricas y la elaboración de conjeturas. Trabajamos con un grupo de alumnos de tercer grado. Llevamos a cabo varias intervenciones en el aula dirigidas a que los alumnos hagan explícito y desarrollen el significado que tienen del signo igual[2]. A su vez realizamos un estudio de

[1] Este estudio ha sido desarrollado dentro de un proyecto del plan nacional de I+D+I financiado por el MCyT, con número BSO2002-03035, y cofinanciado con fondos FEDER. Junto a las autoras de esta comunicación, esta investigación ha sido realizada por la Dra. Rebecca Ambrose (U. California, Davis).

[2] En esta comunicación nos centramos en el significado del signo igual en contextos aritméticos (equivalencia en valor numérico de dos expresiones numéricas), siendo conscientes de que en el álgebra su significado se hace más complejo al ser empleado en diversos tipos de igualdades: identidades, igualdades limitadas a ciertos valores de las variables y definiciones, entre otros.

la emergencia y desarrollo de estrategias de resolución de igualdades numéricas basadas en el establecimiento de relaciones entre los términos y operaciones de ambos miembros de la misma y en la consideración de las igualdades aritméticas como un todo.

Nuestro punto de partida es la siguiente conjetura: se ha detectado que los alumnos de tercer grado de educación elemental o primaria muestran una comprensión muy limitada del significado del signo igual. Esto se deduce de las dificultades que encuentran en la resolución de igualdades numéricas. Suponemos que dichas dificultades no son atribuibles, en general, a falta de capacidad de los alumnos debido a su desarrollo evolutivo y que un trabajo sistemático y ordenado, con igualdades numéricas, puede permitir en estos escolares una mejor comprensión del signo igual y fomentar en ellos el desarrollo de pensamiento relacional como una estrategia para resolver igualdades numéricas.

2. Objetivos de la investigación

El objetivo de este trabajo de investigación es estudiar la comprensión mostrada por los estudiantes del significado del signo y la emergencia y desarrollo de pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas. Para ello trabajamos con los alumnos en el aula durante cinco sesiones de duración variable (entre quince y cincuenta minutos), realizadas en días diferentes y durante el horario escolar. La sesión 1 está dirigida a diagnosticar la comprensión que tienen los alumnos, detectar posibles usos de pensamiento relacional y explorar las estrategias empleadas por los mismos en la resolución de igualdades numéricas abiertas. En las sesiones 2, 3 y 4, nos centramos en diseñar y llevar a la práctica actividades que puedan favorecer que los alumnos desarrollen la comprensión del significado del signo igual y promuevan el uso de pensamiento relacional en la resolución de las igualdades. En la última sesión, se evalúa la durabilidad de la comprensión mostrada previamente por los alumnos así como el uso de pensamiento relacional.

3. Marco Teórico

3. 1 Pensamiento relacional

Uno de las principales expresiones utilizadas en este trabajo es "Pensamiento relacional". Decimos que una persona *usa pensamiento relacional en contextos matemáticos* cuando examina alternativamente dos o más conceptos o ideas matemáticas para apreciar (recordar o detectar) relaciones que pueden existir entre ellos, y analiza o usa estas relaciones con la intención de resolver un problema, tomar una decisión o aprender algo sobre la situación o los conceptos involucrados. En el contexto de la aritmética, en el que se centra este trabajo, este término ha sido empleado por Koehler (2004) haciendo referencia a "las muchas relaciones que los niños reconocen y construyen entre números, expresiones y operaciones" (p. 2). Por su parte Carpenter et al. (2003) se refieren al uso de pensamiento relacional en el contexto de igualdades numéricas uniéndolo a la comprensión del significado (relacional) del signo igual. En este contexto se entiende que un alumno usa pensamiento relacional al resolver una igualdad numérica cuando obtiene la respuesta, a la misma, estableciendo comparaciones entre los números o expresiones a ambos lados del signo igual, sin necesidad de realizar explícitamente las operaciones expresadas. Por ejemplo, en la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$ puede observar que la respuesta correcta es doce, como consecuencia de la propiedad conmutativa, siendo ésta una estrategia alternativa a realizar la suma $12 + 7 = 19$ y posteriormente resolver el problema $19 = 7 + \square$. De forma similar, la igualdad $8 + 4 = \square + 5$ se puede resolver usando pensamiento relacional observando que cinco es una unidad más que cuatro y, por lo tanto, la cantidad desconocida deberá ser una unidad menos que ocho.

La aritmética elemental da lugar a multitud de actividades (no siendo siempre necesaria una comprensión previa del signo igual) en las que se puede desarrollar el pensamiento relacional centrando el foco de atención en las relaciones entre las operaciones y los números involucrados, manteniéndolo alejado del cálculo directo de la respuesta. En algunas de estas actividades, como las que se consideran en este estudio, se trabaja además el significado relacional del signo igual y por tanto la consideración de las igualdades como un todo, como una proposición.

Estas actividades favorecen un aprendizaje significativo de la aritmética, el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al. 2003, Koehler, 2004). El trabajo centrado en pensamiento relacional con estas actividades, es importante, entre otras cosas, porque los conceptos o ideas matemáticas están dentro de estructuras interrelacionadas y porque el reconocimiento de dichas relaciones es considerado como una de las bases del desarrollo de la comprensión de las matemáticas (Castro, Rico, y Castro, 1987; Hiebert y Carpenter, 1992).

3.2 Estudios previos de interés para este trabajo

En lo referente a la resolución de igualdades numéricas, según recogen Lindvall e Ibarra (1980), han sido ampliamente estudiadas las estrategias y dificultades que manifiestan los alumnos al resolver igualdades numéricas abiertas[3] de las formas $a \pm b = c$ y $c = a \pm b$, analizando: la influencia de la operación, la posición de la operación y de la cantidad a averiguar (incógnita) y la existencia o no de solución en el conjunto de los números enteros. Los estudios de Behr, Erlwanger, y Nichols (1980), Falkner, Levi, y Carpenter (1999), y Freiman y Lee (2004) han centrado su atención en la resolución de igualdades abiertas de no acción[4], observando que los alumnos encuentran importantes dificultades en la resolución de este tipo de igualdades y con frecuencia tienden a cambiarlas de acuerdo con una interpretación operacional del signo igual. La mayoría de los alumnos entienden el signo igual como un símbolo que debe ir seguido a su derecha de la respuesta a la operación u operaciones situadas a su izquierda y tienden a rechazar igualdades de la forma $c = a + b$ porque "están al revés" cambiándolas a: $c + a = b$ ó $a + b = c$. Dan como respuestas más frecuentes a las igualdades de las formas $a = a$, $c = a + b$, $a + b = c$ y $a + b = c + d$, (con a, b, c o d desconocido) uno de los números de la igualdad, la suma o diferencia de algunos números de la igualdad o la suma de todos los números de la misma (Freiman y Lee, 2004). Un uso erróneo del signo igual señalado por Kieran (1981) consiste en encadenar operaciones en expresiones tales como 8 + 4 = 12 + 5 = 17.

Por otra parte, en diversos estudios (Thorton, 1978; Rathmell, 1978; Koehler, 2004), se ha destacado la bondad del uso de estrategias de pensamiento y de cálculo flexibles basadas en pensamiento relacional en el aprendizaje de los hechos numéricos. Estos investigadores han observado que la enseñanza de este tipo de estrategias favorece el

[3] Las igualdades abiertas son aquellas que presentan algún término desconocido (incógnita), a averiguar (Ej. 8 + 4 = _ + 5). Las igualdades cerradas, por el contrario, aparecen completas, sin ningún término desconocido (Ej. 8 + 4 = 7 + 5).

[4] Las igualdades de no acción son aquellas sin símbolo operacional en ambos miembros (Ej. 3 = 3) o con signos operacionales a ambos lados del signo igual (Ej. 3 + 5 = 7 + 1). En cambio las igualdades de acción incluyen signos operacionales únicamente en uno de los miembros (Ej. 4 + 3 + 5 = 12 ó 6 = 3 + 3). Tanto las igualdades de acción como las de no acción pueden ser abiertas o cerradas.

aprendizaje y retención de hechos numéricos básicos así como la transferencia de este conocimiento a otros problemas. Otros estudios que resumen Liebenberg, Sasman, y Olivier (1999) sugieren que la enseñanza tradicional no ha sabido promover el uso de pensamiento relacional, habiéndose observado que la mayoría de los alumnos no son capaces de resolver igualdades abiertas sin calcular la respuesta a las operaciones expresadas, debido a una falta de conocimiento de las operaciones aritméticas y sus propiedades. Kieran (1981) alude a la dificultad en la aceptación de la falta de clausura, es decir, la dificultad de considerar expresiones como entidades en sí y la necesidad de que aparezca expresado el resultado o valor de cada expresión. Esta limitación va acompañada de una percepción de las expresiones como procesos o acciones y no como objetos matemáticos. Los estudios de Carpenter et al. (2003) y Koehler (2004), más recientes, presentan casos de alumnos de primaria que han hecho uso de pensamiento relacional de manera eficaz en la resolución de igualdades numéricas y en otras actividades aritméticas. Estos estudios, entre otros, han servido de base para nuestro trabajo de investigación.

4. Metodología

4. 1 Diseño de la investigación

Hemos aplicado el *diseño de investigación dirigido por una conjetura* de Confrey y Lachance (2000). Este diseño está especialmente orientado a la realización de estudios de investigación que se desarrollen en el aula, habitualmente dirigidos a investigar nuevas estrategias de enseñanza o a analizar diferentes enfoques para el contenido y la pedagogía de un conjunto de conceptos matemáticos. El diseño se basa en una conjetura, es decir, en “una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes” (pp. 234-235), la cual es revisada y elaborada a lo largo del proceso de investigación. No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía de la investigación, existiendo, además, objetivos o preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta.

La recogida de datos que acompaña a este diseño es exhaustiva para poder describir con precisión las interacciones ocurridas en el aula, la actuación y evolución de los alumnos, y las reflexiones y decisiones tomadas por los investigadores a lo largo del proceso de investigación. Los datos son sometidos a dos tipos de análisis; uno preliminar y continuo, después de cada intervención, que permite la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura, y otro, un análisis final de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos el cual conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de los alumnos.

4.2 Sujetos

Dos investigadoras (autora y codirectora del estudio), trabajamos con una clase de 18 alumnos de ambos sexos de tercer grado de un colegio público de la ciudad de Sacramento (California). La clase era étnica y lingüísticamente diversa. Cinco alumnos hablaban un segundo idioma y dos de ellos tenían dificultades para comprender el lenguaje hablado en el aula, el inglés. Durante los meses previos, las investigadoras habíamos trabajado semanalmente con el grupo de alumnos realizando una variedad de actividades matemáticas no relacionadas con la resolución de igualdades numéricas ni el desarrollo de pensamiento relacional. La maestra del aula estuvo siempre presente y ocasionalmente colaboró ayudando a los alumnos, siendo una de las investigadoras la que condujo el trabajo en el aula en todo momento. La otra investigadora ayudó a los alumnos individualmente (especialmente a aquellos cuya segunda lengua era el inglés) cuando tenían dificultades en la comprensión de la tarea a realizar. Entre nuestras sesiones, la maestra usó un libro de texto “tradicional” para el trabajo en el aula, en el cual se incluía práctica computacional y ocasionalmente igualdades numéricas abiertas con dos términos en cada miembro.

4. 3 Recogida de datos

Nuestro trabajo en el aula durante las cinco sesiones se centró en resolver y discutir igualdades numéricas (Ver organización y distribución de las sesiones en tabla 1). La mayor parte del tiempo se dedicó a realizar discusiones, intercaladas por las tareas escritas que fueron utilizadas como base de la posterior discusión y para evaluar a los alumnos. Las tareas escritas fueron resueltas por los alumnos de forma individual. En las discusiones con toda la clase se consideraron tanto las respuestas correctas como las incorrectas y se les pidió a los alumnos que explicaran cómo habían pensado las igualdades y de qué formas diferentes las habían resuelto. La investigadora a cargo de la discusión facilitó el intercambio de opiniones entre los alumnos clarificando o repitiendo sus explicaciones al resto de la clase y pidiendo aclaraciones.

La separación temporal de las sesiones fue en parte intencionada, para que nuestra intervención en el aula pudiera tener un efecto más prolongado en los alumnos, y en parte accidental debido a los periodos vacacionales y nuestra limitada accesibilidad al aula.

Sesiones	1	2	3	4	5
Fecha	11-20-03	2-5-04	2-19-04	3-4-04	5-13-04
Número de estudiantes	13	15	18	18	15
Actividades de la sesión	- evaluación escrita - dos entrevistas - discusión breve	- evaluación escrita - discusión - actividad escrita - discusión breve	- discusión - evaluación escrita	- discusión	- evaluación escrita
Tipo de Igualdades	abiertas	cerradas verdaderas y falsas	abiertas y cerradas verdaderas y falsas	cerradas verdaderas y falsas	abiertas

Tabla 1: Organización de las sesiones.

Las sesiones 1, 2 y 4 fueron grabadas en video. Durante la sesión 3 una de las investigadoras tomó notas de la discusión. En todas las sesiones se recogieron las respuestas de los alumnos en hojas de actividades que se les suministraron. Se tomaron anotaciones, durante los diferentes encuentros realizados entre las investigadoras en las que se recogieron las decisiones tomadas sobre el diseño de las diferentes intervenciones, junto con su justificación, así como la opinión de las investigadoras a lo largo del transcurso de la investigación.

4.4 Igualdades numéricas trabajadas

Partiendo del conocimiento aportado por una revisión bibliográfica previa decidimos utilizar igualdades numéricas abiertas e igualdades numéricas cerradas verdaderas y falsas (que debían ser corregidas por los alumnos en caso de ser falsas) de formas variadas como las siguientes: $a \pm b = c$, $c = a \pm b$, $a \pm b = c \pm d$ y $a \pm b = c \pm d \pm e$, la mayoría de ellas diseñadas especialmente para facilitar el uso y desarrollo de pensamiento relacional. Las operaciones involucradas fueron sumas, restas y ocasionalmente alguna multiplicación o división con divisor 1, que no supusieran dificultad para alumnos de tercer grado. Sólo algunas igualdades en las últimas dos sesiones involucraron números grandes (mayores que 100) con la intención de incitar al uso de pensamiento relacional.

Las relaciones implícitas en las igualdades fueron: la propiedad conmutatividad de la suma (Ej. 12 + 7 = 7 + □), la compensación en suma (a + b = (a + c) + (b – c)) o en resta (a – b = (a + c) – (b + c)), la propiedad asociativa de la suma mediante la descomposición de alguno de los sumandos (Ej. 4 + □ = 2 + 2 + 2), la magnitud de las expresiones o números (Ej. 34 = 34 + 12), y en alguna igualdad la relación inversa de la suma y la resta (Ej. 27 + 48 – 48 = 27), la multiplicación como suma repetida (Ej. 4 x 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 5) y la propiedad de que todo número menos si mismo es cero (Ej. 6 – 6 = 1 – 1). Las igualdades numéricas no fueron presentadas a los alumnos agrupadas por relaciones sino tomadas aleatoriamente (las relaciones abordadas en cada sesión se recogen en la primera parte de la tabla 2).

Tras observar en la sesión 1 una fuerte tendencia computacional en los alumnos siempre que tenían que completar una igualdad abierta, decidimos emplear este tipo de igualdades sólo para evaluar la comprensión del significado del signo igual y usar igualdades verdaderas y falsas para impulsar la verbalización y discusión entre los alumnos y promover el uso de pensamiento relacional. En cada una de las intervenciones, en el aula, se emplearon colecciones de igualdades elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior y considerando las sugerencias dadas por Carpenter, et al. (2003). En algunos casos tomamos igualdades que habían sido propuestas por los alumnos en intervenciones previas.

5. Resultados

Los resultados de este estudio atienden principalmente a dos aspectos: las dificultades de los alumnos en la resolución de igualdades numéricas, y la emergencia y desarrollo de pensamiento relacional.

5.1 Dificultades en la resolución de igualdades numéricas

Durante las diferentes sesiones observamos que los alumnos presentan dificultades en la resolución de igualdades numéricas similares a las referidas por otros autores. Inicialmente todos los alumnos muestran una interpretación operacional del signo igual. Se aprecia esta interpretación en las respuestas dadas en las igualdades abiertas de no-acción. En unos casos la operación es correcta, de acuerdo con lo indicado en la igualdad. En otros, se opera con todos los números, sin tener en cuenta la posición del signo igual. En otros casos, se repite algún número de los que aparecen en la igualdad. En otros, se resuelve sólo una parte de la igualdad de la forma $a \pm b=c$, $b=c \pm d$, $a=c \pm d$ ó $a \pm b=d$.

En cuanto al reconocimiento de igualdades verdaderas y falsas, los alumnos no encuentran significado para expresiones de la forma $a=a$ por no tener una operación implicada, ni a $c=a\pm b$ por el orden de los miembros de la igualdad, indicando los alumnos que la igualdad está al revés, tampoco a expresiones del tipo $a\pm b=c\pm d$ por la posición del signo igual *"en medio"*, explicando que prefieren verlo al final.

En esta tendencia computacional, los alumnos no reparan en la igualdad como un todo sino que proceden a operar inmediatamente, involucrando todos o parte de los números de la igualdad para poder rellenar el recuadro. Consideramos que este comportamiento es una consecuencia de la orientación al cálculo que tradicionalmente domina la enseñanza de la aritmética.

A lo largo de las sesiones, la compresión del significado del signo igual de la mayoría de los alumnos evoluciona desde la interpretación operacional de este símbolo, cuyo uso sólo es aceptado por los alumnos en igualdades con las operaciones a la izquierda y la respuesta a la derecha, a una interpretación relacional del signo igual, pasando en algunos casos por una etapa intermedia de aceptación de igualdades de la forma $c=a \pm b$[5].

5.2 Emergencia y desarrollo de pensamiento relacional

Analizamos este punto centrándonos principalmente en las explicaciones dadas por los alumnos durante las discusiones. En total once de los dieciocho alumnos verbalizaron pensamiento relacional a lo largo de las cinco sesiones de trabajo en el aula: uno en la sesión 1, otro en la sesión 2, dos en la sesión 3 (en dos ocasiones cada uno), seis en la sesión 4 (uno de ellos en tres ocasiones, otro en dos y los demás en una) y siete en la sesión 5. Las explicaciones dadas por los alumnos fueron como sigue:

"[12 + 11 = 11 + 12] es verdadera porque han cambiado de orden los números".

Este alumno no realizó ningún tipo de cálculo sino que observó la igualdad en su totalidad, comparó las expresiones a ambos lados del signo igual y aplicó la propiedad *conmutativa*.

"34= 34 + 12 es falsa porque treinta y cuatro más doce va a ser más que treinta y cuatro".

Este alumno justificó la falsedad de la igualdad comparando las expresiones 34 y 34 +12 y razonando en función de su *magnitud*.

"[12 – 7 = 13 – 8] es cierto porque han sumado uno al siete y han sumado uno al doce".

Este alumno expresa así la relación de *compensación* en la resta.

En la igualdad 238 + 49 = □ + 40 + 9 algunos alumnos tras responder 238 razonaron aplicando la propiedad asociativa de la suma. Explicaron:

"Me di cuenta de que el número era 49 y 40 + 9 = 49 por eso sume 238"

"Dividí el 49 por la mitad en 40 y 9. No sumé 238 y 49".

En la tabla 2 se muestra qué tipo de explicaciones se produjeron en las distintas sesiones atendiendo a las relaciones o propiedades verbalizadas por los alumnos. En la primera parte de esta tabla se recoge el número de igualdades que abordaron (implícitamente) las relaciones conmutativa, asociativa (en situaciones de descomposición de algún término), compensación y magnitud de las expresiones. Como se observa, los alumnos no mostraron pensamiento relacional en todas las igualdades, siendo las relaciones de magnitud de las expresiones y la propiedad asociativa, en situaciones de descomposición de un algún término, las más explicitadas. En la mayoría de las igualdades la relación expresada por los alumnos corresponde a la relación con la que identificamos en la tabla dicha igualdad, sin embargo, en la igualdad 103 + 205 = 105 + 203 de la sesión 4 aunque un alumno verbalizó esta relación (*"Han cambiado de orden el cinco y el tres"*), la relación de compensación, otros alumnos dieron explicaciones centradas en otra aplicación de la propiedad asociativa: *"Es verdadera porque ciento tres más doscientos cinco es igual a ocho y ciento cinco más doscientos tres es ocho y los dos ochos hacen juego"* o *"Yo he visto el cinco y el tres porque cinco más tres son ocho y hay dos ochos haciendo juego y entonces tenemos trescientos ocho y en el otro lado trescientos ocho."*

Por otra parte, se observa un posible uso de pensamiento relacional en las igualdades construidas por los alumnos en las sesiones 2 y 3. Algunas de las relaciones que pueden

[5] Esta evolución se detalla en Molina y Ambrose (en prensa).

observarse en estas igualdades son: la propiedades del cero como neutro de la suma (Ej. 10 + 9 = 19 + 0), la suma de números iguales es igual (Ej. 10 + 0 = 10 + 0), la compensación en la suma (Ej. 51 + 51 = 50 + 52), la multiplicación como suma repetida (Ej. 2 x 9 = 9 + 9), la propiedad conmutativa (Ej. 10 + 7 = 7 + 10), la resta de un número menos si mismo es cero (Ej. 100 – 100 = 0 – 0) y la propiedad asociativa de la suma (Ej. 90 + 200 = 200 + 10 + 10 + 20 + 30 + 20). Sin embargo, al interrogar a algunos de estos alumnos sobre cómo estaban construyendo las igualdades no expresaron relación alguna.

		Conmutativa	**Magnitud**	**Compensación**	**Asociativa-descomposición**
Relaciones trabajadas	1	+		+ + + –	
	2		+ +	+	
	3	+	+ + + + –	+ +	+
	4		+ –	+ –	+ +
	5	+		+ + + –	+
Relaciones expresadas por los alumnos	1			+	
	2		+		
	3	+	+ + +		
	4		+ +	+ –	+ +
	5				+ + + +

Tabla 2: Dos tipos de frecuencias asociadas a las principales relaciones consideradas. Los símbolos + o – refieren a la operación involucrada en la igualdad. No tenemos información de las casillas sombreadas.

6. Conclusiones

Los resultados de este estudio muestran que el significado del signo igual no es un conocimiento intuitivo para los alumnos ni es adquirido directamente mediante la explicación de la persona que ejerce la autoridad en el aula. Los alumnos necesitaron trabajar con igualdades de diversas formas para ir construyendo una comprensión del significado relacional del signo igual, así como para modificar su interpretación operacional de este símbolo. Entendemos que las dificultades observadas son resultado de la reiterada consideración, a lo largo de la formación escolar de los alumnos, de igualdades con las operaciones en el lado izquierdo y la respuesta en el lado derecho de las mismas, junto con el énfasis que se hace en la obtención de una respuesta que suele dominar la enseñanza de la aritmética. Este significado operacional adjudicado al signo igual es referido en la literatura como significado aritmético del signo igual (Rojano, 2002), sin embargo la naturaleza relacional de este signo así como las importantes dificultades observadas y el interés del trabajo centrado en relaciones muestran lo poco adecuado que resulta esta limitación impuesta al uso aritmético del signo igual.

Las igualdades numéricas verdaderas y falsas probaron ser un contexto eficaz mediante el cual los estudiantes pueden verbalizar su significado del signo igual y mejorar la comprensión de este símbolo, además contribuyeron a fomentar la observación de la totalidad de la igualdad, romper su tendencia computacional, y al desarrollo de pensamiento relacional. Aunque dicho desarrollo tuvo un éxito parcial, los resultados permiten mostrar que los alumnos de tercer grado están capacitados para desarrollar pensamiento relacional y que su uso permite abordar relaciones matemáticas que habitualmente no son explicitadas en el aula y que constituyen parte de una buena formación matemática. Una dificultad observada en relación a este desarrollo mediante las actividades consideradas es la necesidad de que los alumnos se escuchen unos a otros para que el intercambio de estrategias y opiniones sea realmente fructífero.

El carácter de intervención en el aula de esta investigación la dota de consecuencias directamente aplicables al aula. Las dificultades señaladas en la resolución de los distintos tipos de igualdades y la evolución de la comprensión y de las estrategias de los alumnos observada, aportan información de utilidad para la enseñanza. Se muestra la potencialidad del trabajo centrado en el desarrollo de pensamiento relacional que favorece un enfoque no computacional y una comprensión semántica de la aritmética, además del acercamiento a la clausura de las expresiones, idea de gran importancia a tratar en la formación pre-algebraica.

Bibliografía

Behr, M, Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching,* 92, 13-15.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics,* 10 (2), 70-83.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Castro E., Rico, L. y Castro E. (1987). Números y Operaciones. Fundamentos para la aritmética escolar. Madrid: Editorial Síntesis.

Confrey J. y Lachance A., (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly, y R. A. Lesh, (Eds.), *Research design in mathematics and science education,* pp. 231-265. NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Falkner, K. P., Levi, L., y Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics,* 6, 232-236.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 2, 415-422.

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 65-97. NY: Macmillan.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding,* 133-155, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, 317-326.

Koehler, J. L. (2004). *Learning to think relationally: thinking relationally to learn.* Dissertation Research Proposal. University of Wisconsin-Madison.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Paper from the 5th annual conference of the Mathematics Education Associations of South Africa (AMESA), Puerto Elizabeth.

Lindvall, C. M., y Ibarra C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education,* V. 11 (1), 50-62.

Molina, M. y Ambrose, R. (en prensa). What is that Equal Sign Doing in the Middle?: Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign. *Teaching Children Mathematics.*

Rathmell, E. C. (1978) Using thinking strategies to teach the basic facts. En M. Suydam, y R. E. Reys (Eds.), Developing computational skills, 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp.13-38, Reston, VA: NCTM.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. En L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 143-163. Holanda: Lawrence Erlbaum Associates.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(3), 214-227.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 4, 417- 424.